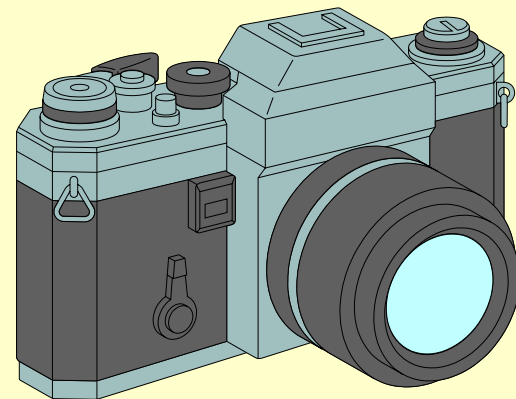
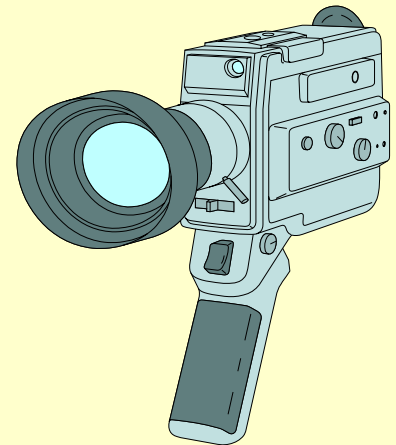
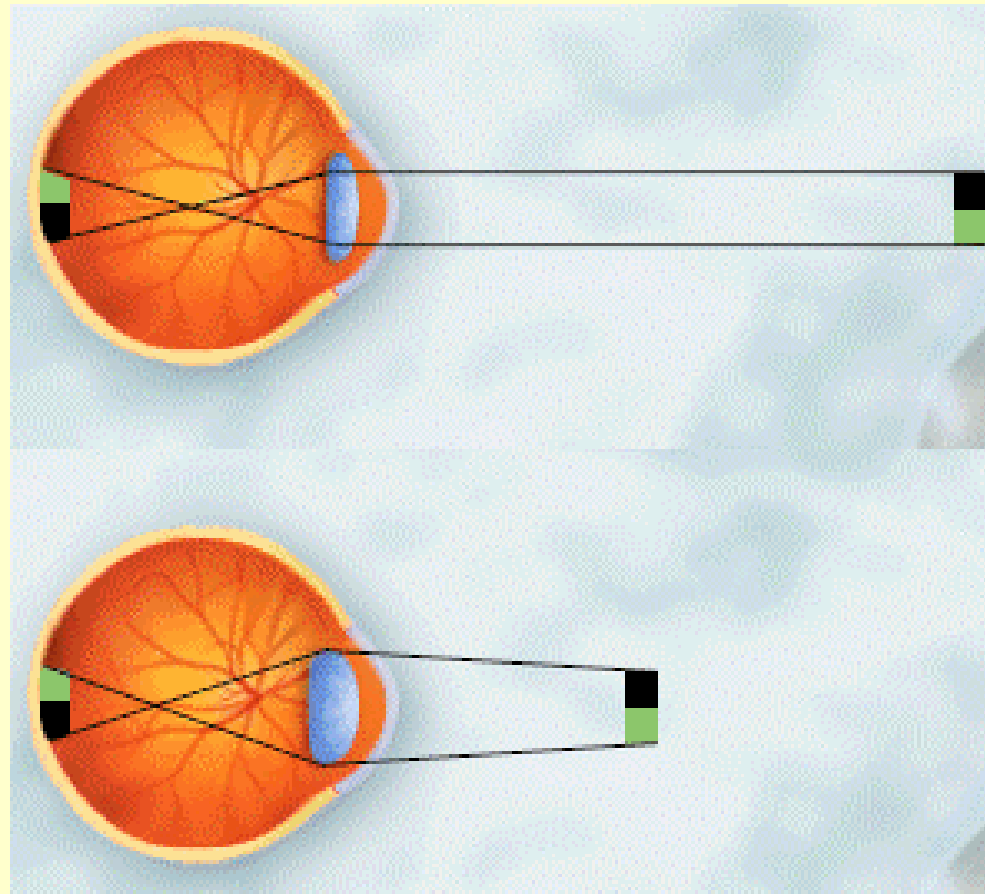


# Plano da aula de hoje

- **Fundamentos de Imagens Digitais 2D e 3D**
  - 📁 **Motivação: preparatório p/ as próximas aulas**
    - Compressão, transformadas geométricas, segmentação, filtragem, PACS, visualização, tomografia
  - 📁 **Conceitos básicos de proc. imagens**
    - pixel/voxel, resolução espacial, discretização, faixa dinâmica, resolução temporal
    - **histograma e segmentação por threshold**
    - **sistemas lineares**
    - **medidas de qualidade em imagens**
    - **visualização**
    - **Transformadas, convolução**
    - **interpolação**

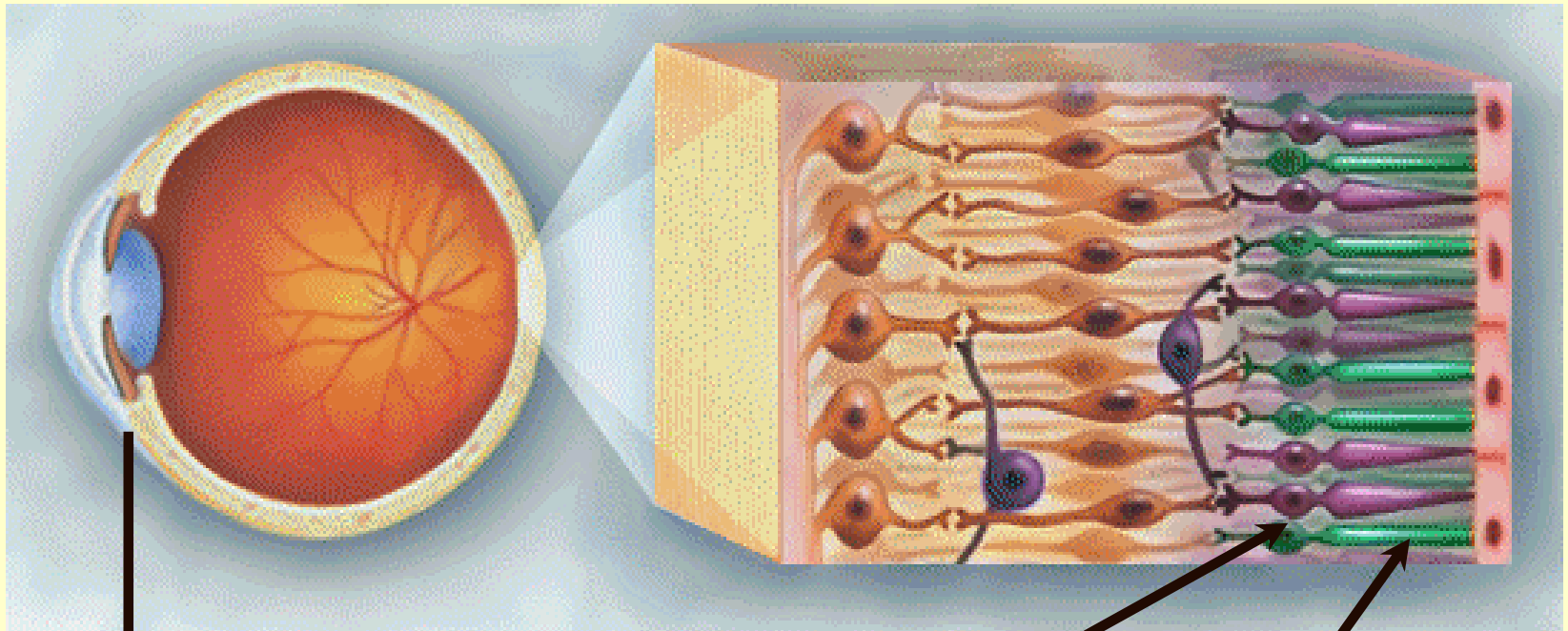
# Formação da Imagem no Olho

## Mecanismos de Adaptação: Foco



# Formação da Imagem no Olho

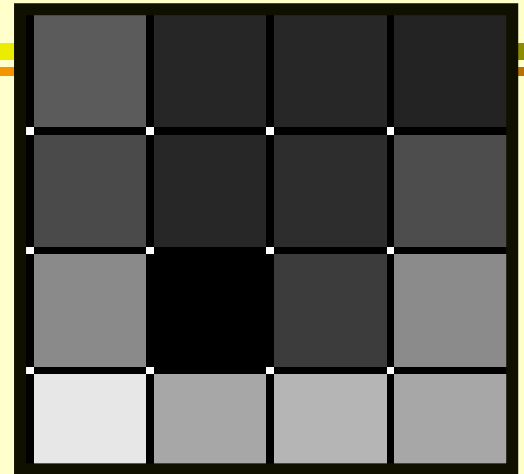
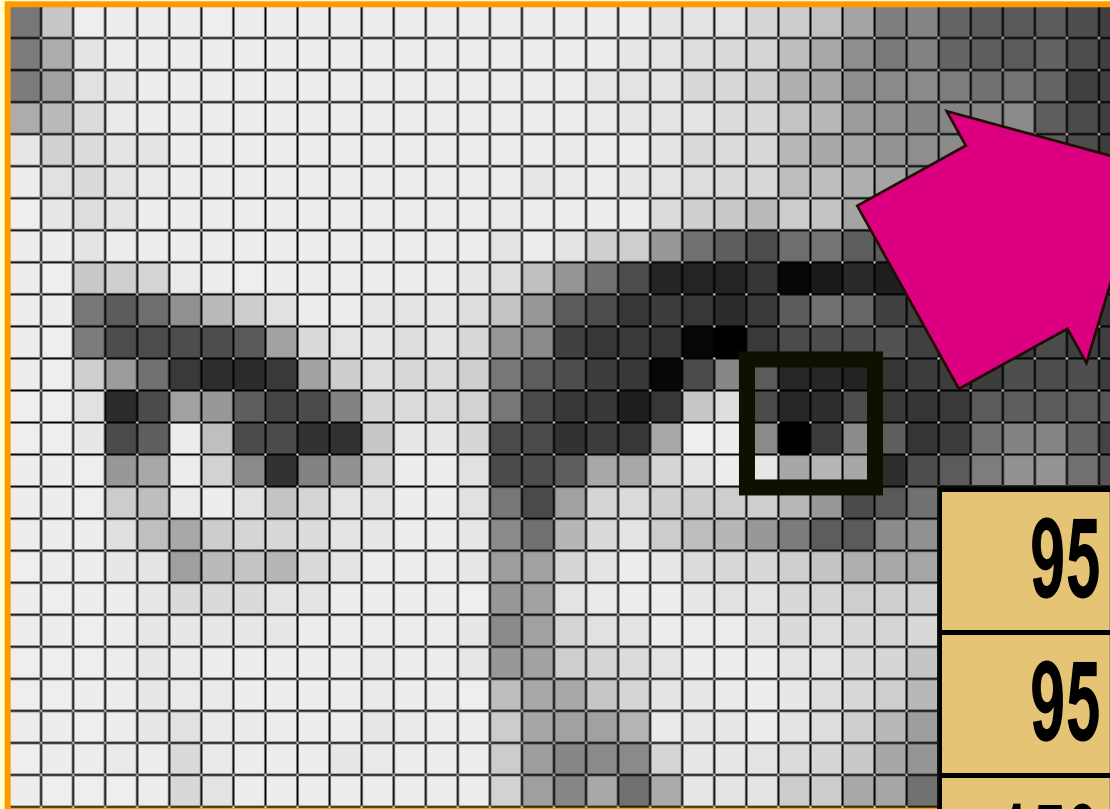
## Mecanismos de Adaptação: Brilho e Cor



Íris

Cones e Bastonetes  
(7M e 70M células)

# Processo de Discretização



95	80	80	80
95	90	90	105
150	20	100	130
220	150	160	150

**256 tons de cinza**

# Imagens: representação

- **Função contínua**

$$f(x,y)$$

$$f: \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^p$$

- **Função discreta**

$$f(i,j)$$

$$f: \mathbb{Z}_+^n \Rightarrow \mathbb{Z}_+^p$$

- ☞ **Pixel (picture element)**

$$f(i,j)$$

- ☞ **Voxel (volume element)**

$$f(i,j,k)$$

- ☞ **Spel (space element)**

$$f(i,j, \dots n)$$

- **Representação matricial**

$$f[i][j][\dots]$$

$$F_{n \times m} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{nm} \end{bmatrix}$$

# Resumo: Conceitos básicos

- **Imagem digital => matriz n-dimensional**

- ☞ **2D => pixel (picture element)**

- raio X - CR (4096 x 4096 x 2B)

- **short f[4096][4096]**

- ☞ **3D => voxel (volume element)**

- CT multi-slice (700cortes x 512 x 512 x 2B)

- XA (1000 quadros x 512 x 512 x 1B)

- **byte f[1000][512][512]**

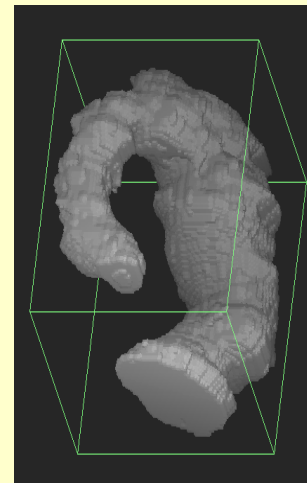
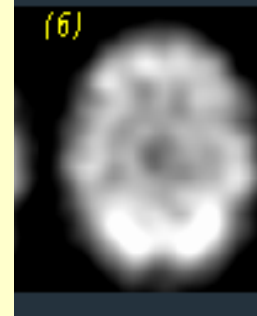
- ☞ **4D => spel (space element)**

- gated SPECT, RM, ..

- ☞ **multi-atributos**

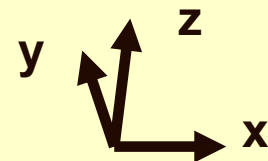
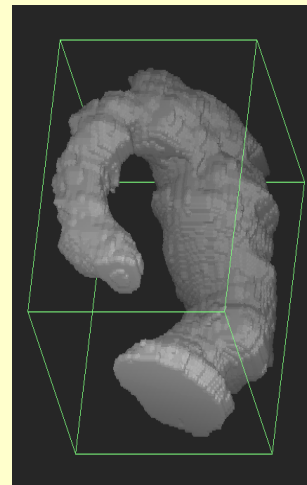
- RM (PD, T1, T2)

- **$F: I^n \rightarrow R^m$**



# Resumo: Matriz

- número de dimensões (espaço)
  - número de elementos por dimensão
  - número de atributos (medidas por elem.)
  - número de bits ou bytes por elemento
- 
- 📁 CT multi-slice (700cortes x 512 x 512 x 2B)
  - 📁 3D, 700 em z, 512 em x e y, 1 atributo, 2 bytes por elemento
  - 📁 367 MB
  - 📁 **short f[700][512][512]**



# Criar uma matriz

- **gated RM=> 4D (16 fases, 128 slices, 256 x 256, 2 bytes) com 3 atributos para cada spel (PD, T1, T2)**

**short f [16][128][256][256][3]**



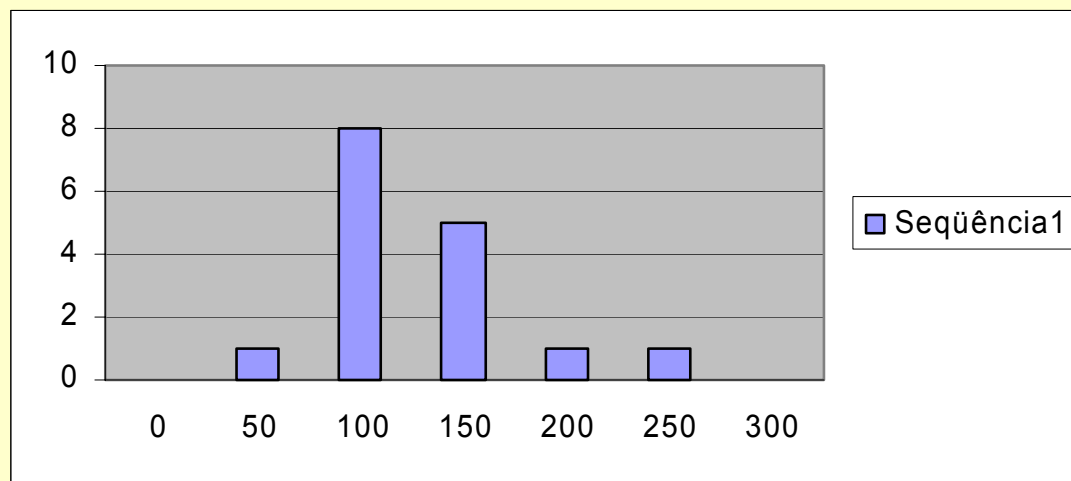
- Arquivo **raw**
  - ✎ type of data: byte, int, float, ...
  - ✎ [little, big] endian: endereço em memória aponta p/ little ou big part
  - ✎ escala de cores
  - ✎ segmentação por thresholding
- Arquivo JPEG
- Arquivo DICOM

# Plano da aula de hoje

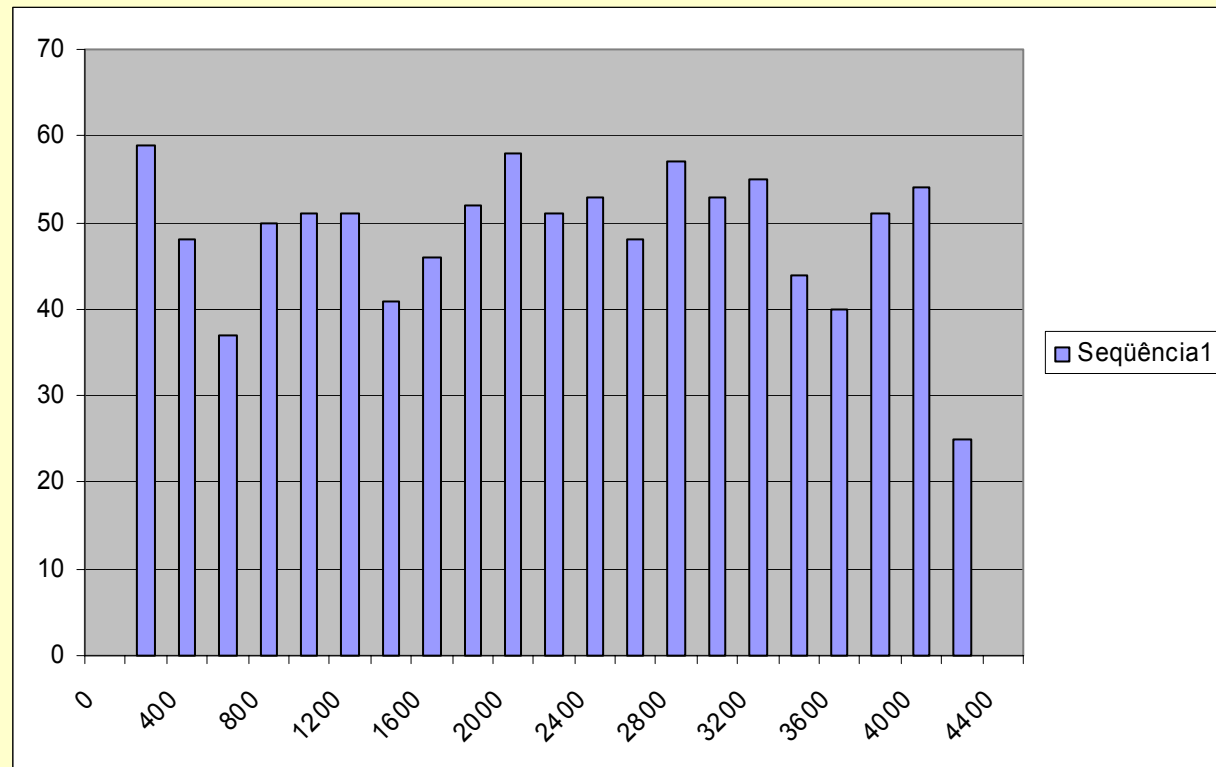
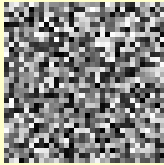
- **Fundamentos de Imagens Digitais 2D e 3D**
  - 📁 **Motivação: preparatório p/ as próximas aulas**
    - Compressão, transformadas geométricas, segmentação, filtragem, PACS, visualização, tomografia
  - 📁 **Conceitos básicos de proc. imagens**
    - pixel/voxel, resolução espacial, discretização, faixa dinâmica, resolução temporal
    - **histograma e segmentação por threshold**
    - sistemas lineares
    - medidas de qualidade em imagens
    - visualização
    - Transformadas, convolução
    - interpolação

# Histograma

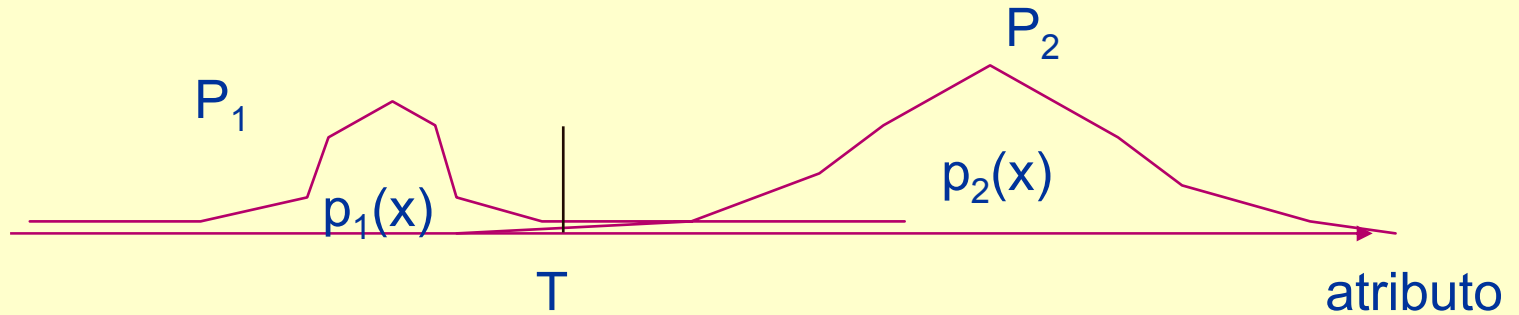
95	80	80	80
95	90	90	105
150	20	100	130
220	150	160	150



# distr. const, 32x32



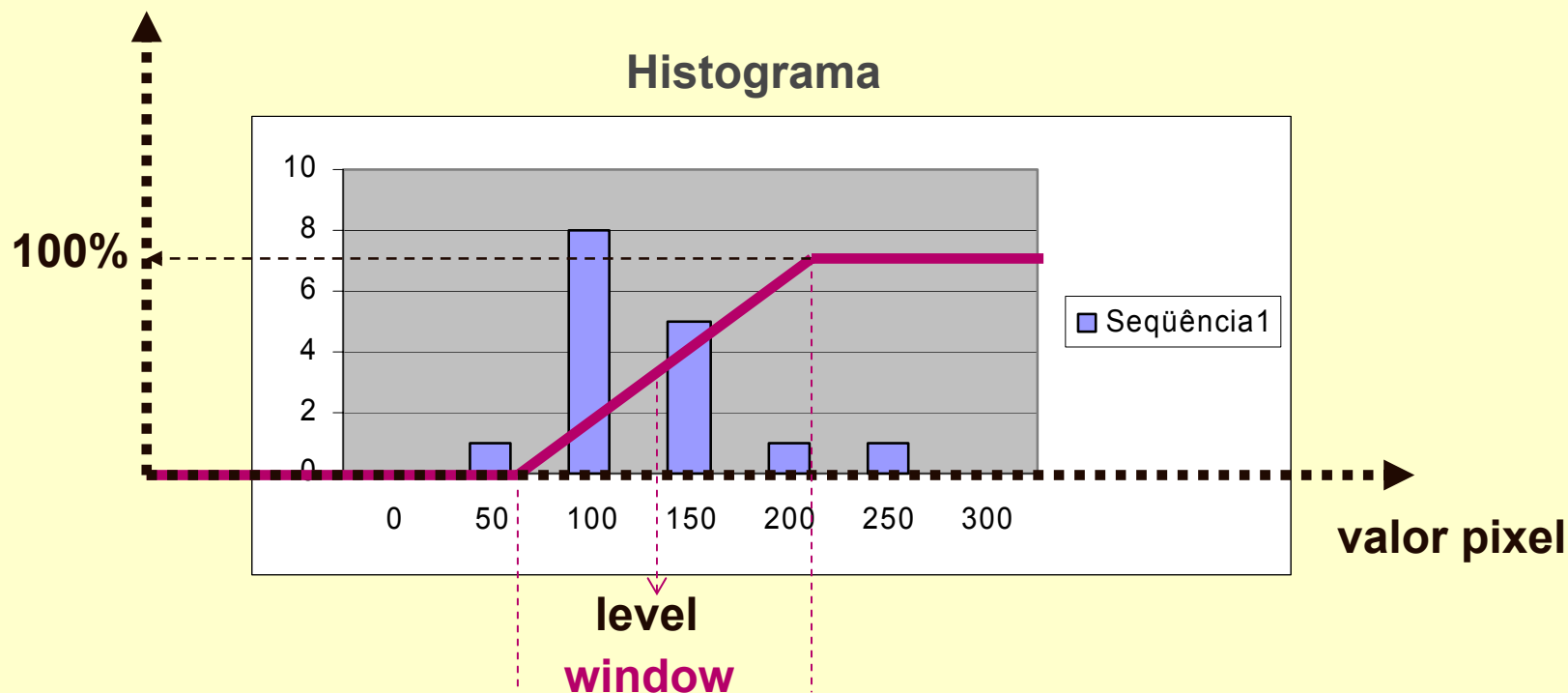
# Segmentação por nível



# Exemplos práticos

- contraste / brilho (window / level)

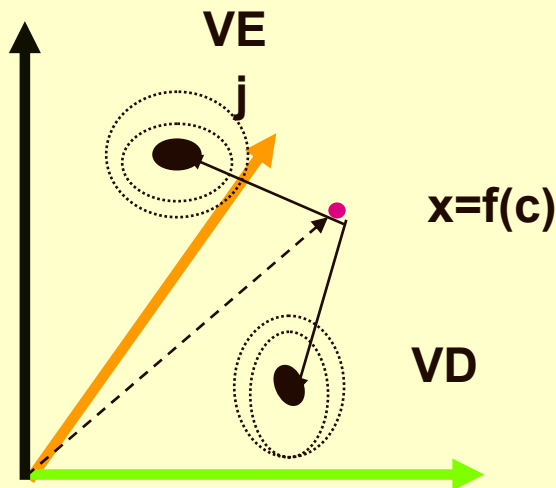
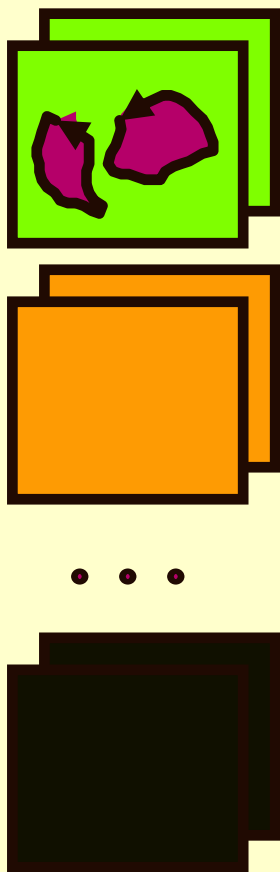
Intensidade do monitor



# mãos na massa: segmentação

- **Segmentação por thresholding**
  - 📁 **imagem DICOM de MRI (sample)**
  - 📁 **CT => simples p/ segmentar por faixa de HU**

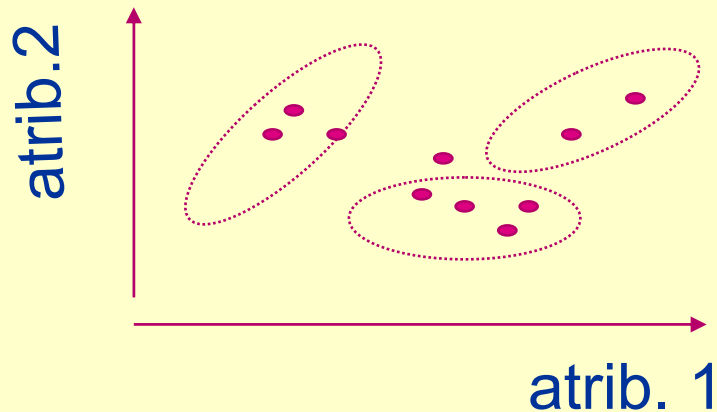
# Múltiplos atributos



$$d_j^2(x) = (x - \bar{x}_j)^T \cdot S_j^{-1} \cdot (x - \bar{x}_j)$$



# Generalização: clusters



- 0)  $K$  classes com centro em  $c_i$
- 1) Inicializar  $c_j^{(0)}$
- 2) Para cada  $x_i \Rightarrow$  atribuir  $x_i$  p / classe  $j$  com menor distancia
- 3) Recalcular  $c_j$
- 4) Repetir 2) e 3) ate nao haver mais alter.

# Plano da aula de hoje

- **Fundamentos de Imagens Digitais 2D e 3D**
  - 📁 **Motivação: preparatório p/ as próximas aulas**
    - Compressão, transformadas geométricas, segmentação, filtragem, PACS, visualização, tomografia
  - 📁 **Conceitos básicos de proc. imagens**
    - pixel/voxel, resolução espacial, discretização, faixa dinâmica, resolução temporal
    - **histograma e segmentação por threshold**
    - **sistemas lineares, convolução, transformada**
    - **medidas de qualidade em imagens**
    - **visualização**
    - **Transformadas, convolução**
    - **interpolação**

# Modelo de formação: imag. médicas

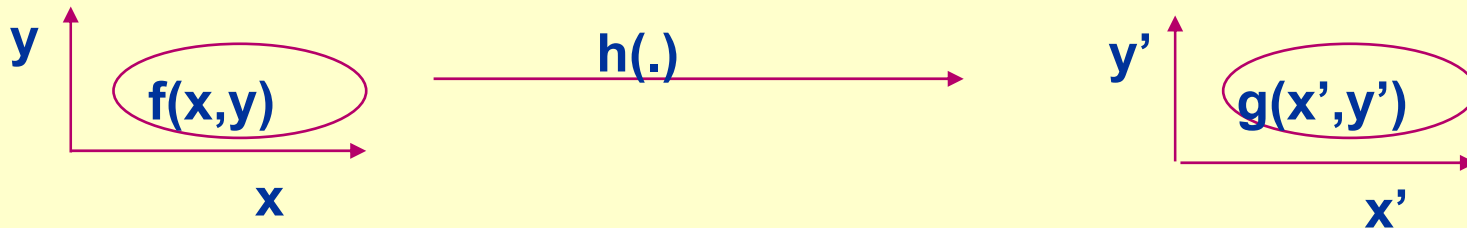
## Objeto

- ◆ transmissão
- ◆ reflexão
- ◆ emissão

## Sistema de Aquisição

- ◆ foto-eletr. .raio-X,
- ◆ piezo-elétr. .US
- ◆ foto-eletr, .MN, MRI

## Imagem



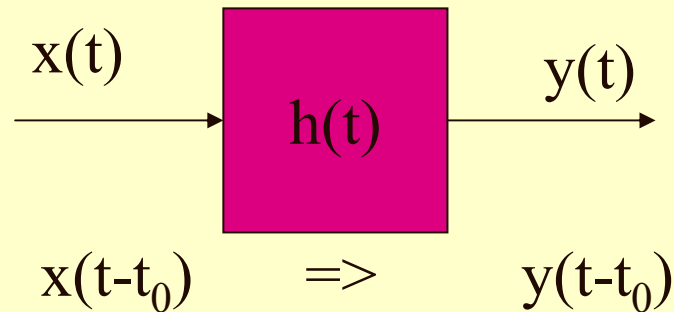
Função geral p/ formação de imagens

$$h(\cdot) = h(x', y', x, y, f(x, y)) \quad (2D)$$

$$h(\cdot) = h(u', u, f(u)) \quad (nD)$$

# Sistemas: invariância

- Invariante com o “tempo”

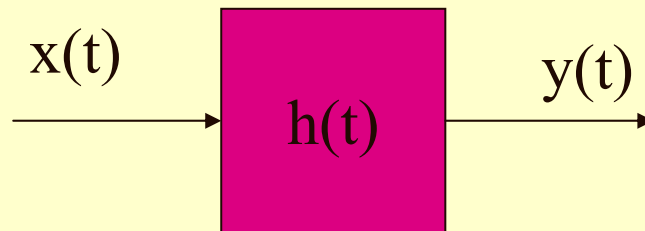


- Variante com o “tempo”

$$y(t) = t + x(t)$$

$$x(t - t_0) \rightarrow t + x(t - t_0) \neq y(t - t_0)$$

- **Princípio da superposição**



$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

$$a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \rightarrow a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

# Sistemas aditivos , lineares

$$f_1(x,y) \longrightarrow g_1(x',y')$$

$$f_2(x,y) \longrightarrow g_2(x',y')$$

- **Sistemas aditivos**

$$g(x',y') = \iint h(x',y',x,y, f(x,y)) \cdot dx \cdot dy$$

- **Sistemas lineares**

$$a.f_1() + b.f_2() \longrightarrow a.g_1() + b.g_2()$$

$$h(x',y',x,y,f(x,y)) = h(x',y',x,y) \cdot f(x,y)$$

$$g(x',y') = \iint h(x',y',x,y) \cdot f(x,y) \cdot dx \cdot dy$$

**PSF : point spread function**

# Sistema não-linear

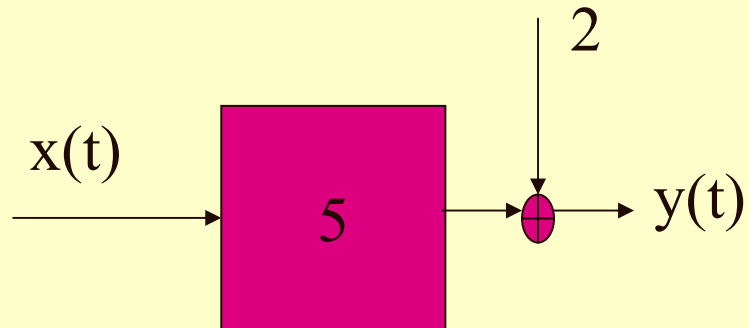
- Incrementalmente linear

$$y(t) = 2 + 5 \cdot x(t)$$

$$y_1(t) = 2 + 5 \cdot x_1(t)$$

$$y_2(t) = 2 + 5 \cdot x_2(t)$$

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow 2 + 5 \cdot (x_1(t) + x_2(t))$$



Sistema linear 

- **Sistemas lineares e invariantes (LTI)**
  - ✎ **são suficientemente caracterizados pela resposta ao impulso**
  - ✎ **possibilita tratamento matemático simplificado**
    - **convolução  $\Rightarrow$  resposta do sistema**
    - **análise no domínio da frequência**
  - ✎ **qq. LTI pode ser representado por produtórias de termos de sistemas de ordens 1 e 2**

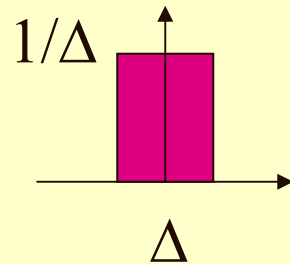


# Impulso

No caso contínuo:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} s(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$



No caso discreto:

$$\delta[i] = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq 0 \\ 1 & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n - k] = \delta[n]$$

LTI

$x(t)$

$h(t)$

$y(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \quad \Rightarrow \text{Combinação linear de } x()$$

$$\delta(t - \tau) \rightarrow h_{\tau}(t)$$

$$\text{Linearidade} \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h_{\tau}(t) d\tau$$

$$\text{Invariante} \Rightarrow h_{\tau}(t) = h(t - \tau)$$

$$\text{Convolução} \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

# LTI: caso discreto



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n - k]$$

$$\delta[n - k] \rightarrow h_k[n]$$

Linearidade  $\Rightarrow$  
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h_k[n]$$

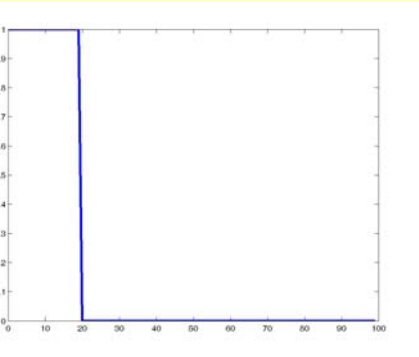
Invariante  $\Rightarrow$  
$$h_k[n] = h[n - k]$$

**Convolução**  $\Rightarrow$  
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

# Convolução: intuitivo

f

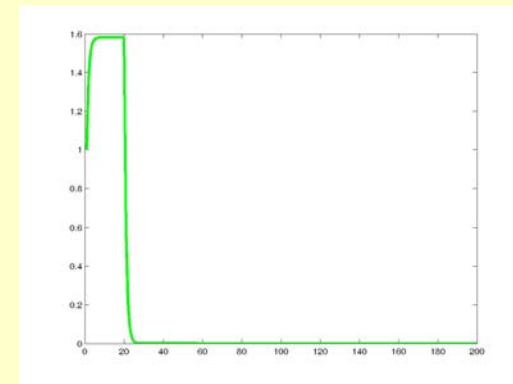
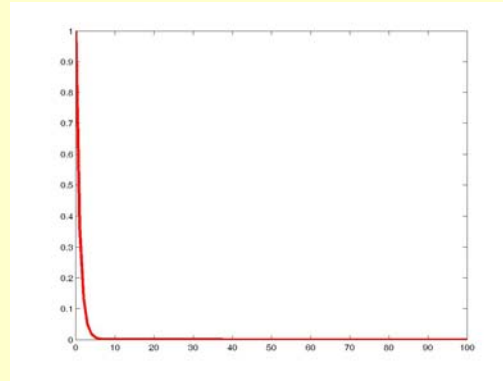


conv

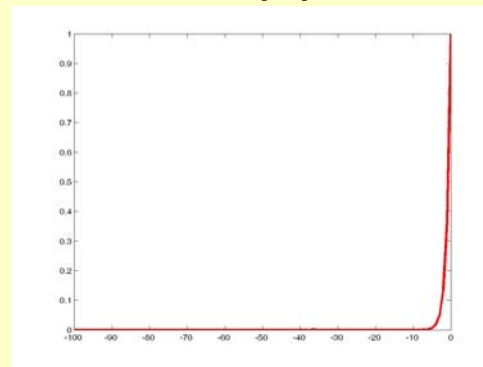
h

=

g



$h(-t)$



# LTI

- Causalidade  $\Rightarrow h(t)=0, t<0$
- Estabilidade  $\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

# Convolução, Transf. de Fourier

- **Convolução: comutativo, associativo, distributivo**
- **Convolução => multiplicação no domínio da frequência**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

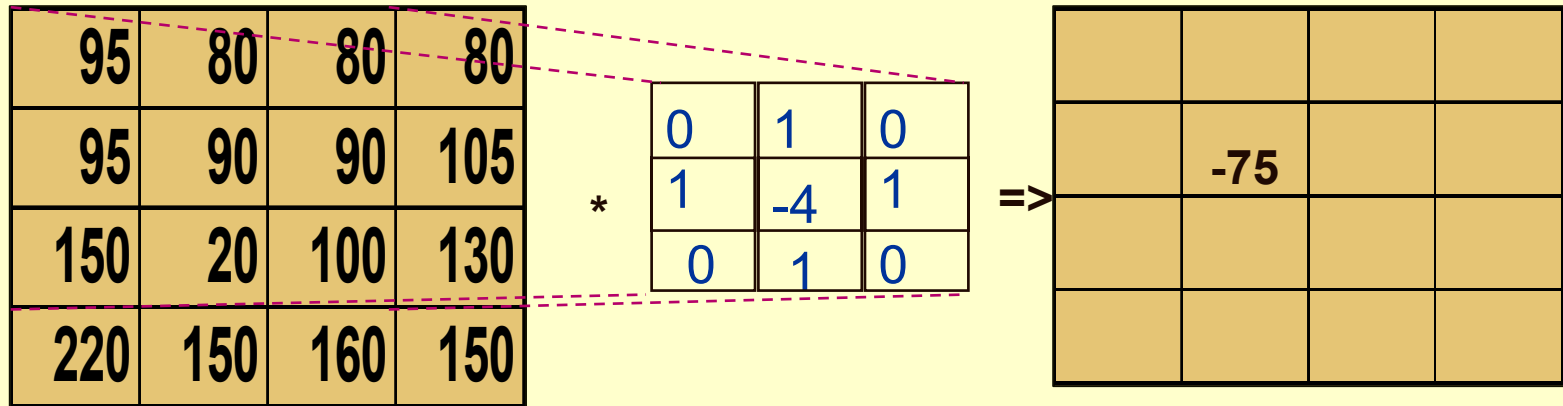
$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot e^{-j2\pi ft} d\tau dt$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t') \cdot e^{-j2\pi f(t+\tau)} d\tau dt'$$

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

# Convolução 2D

$$g(i, j) = f * h = \frac{1}{MN} \sum_m \sum_n f(m, n) \cdot h(i - m, j - n)$$



# Notação

- Geral (nD) vetorial
  - 📁 1D, 2D, 3D, ...
- Operações algébricas, aritméticas, matriciais

$$F_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \boxed{f_{00} \quad f_{01} \quad f_{02}} \\ f_{10} \quad f_{11} \quad f_{12} \\ f_{20} \quad f_{21} \quad f_{22} \end{bmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} f_{00} \\ f_{01} \\ f_{02} \\ \phantom{f_{00}} \\ \phantom{f_{00}} \\ \phantom{f_{00}} \end{bmatrix}$$



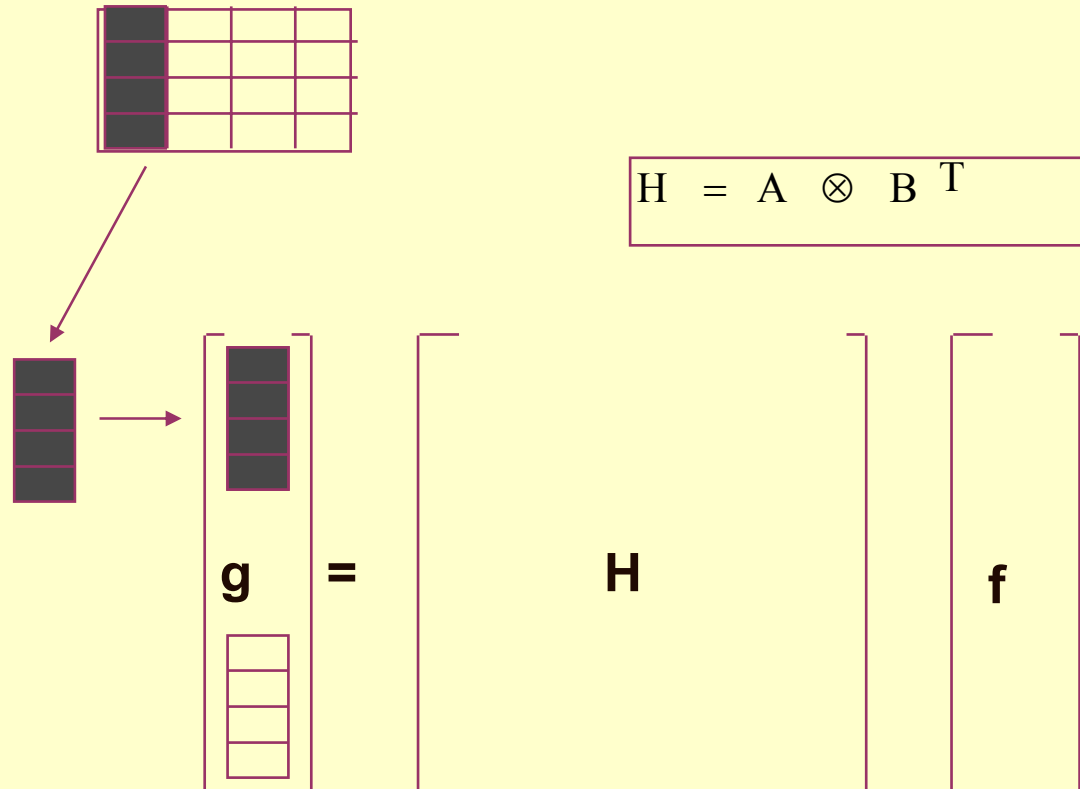
# Sist. lineares: representações

- **Puntual**  
**Operador**  
 $g = H f$

- **Matricial**  
 $G = A.F.B$   
(separavel)

- **Vetorial**  
 $g = H . f$

$$g(x', y') = \iint h(x', y', x, y) . f(x, y) . dx . dy$$



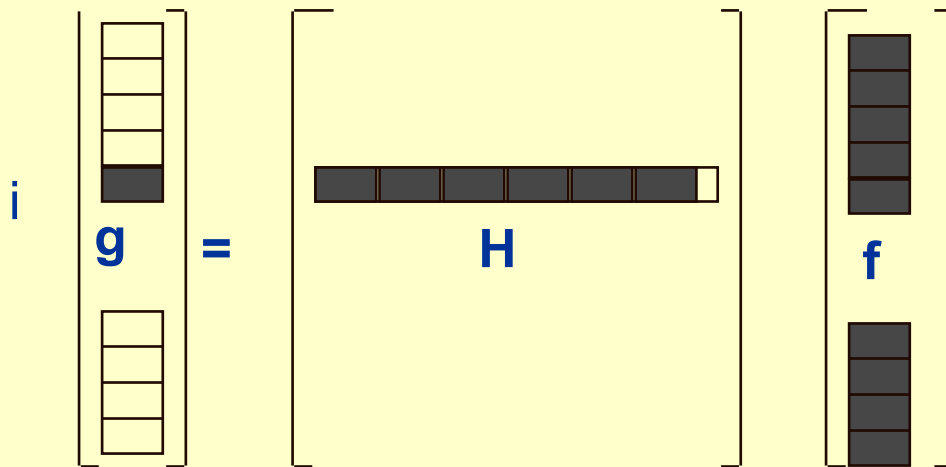
$$H = A \otimes B^T$$

# Notação vetorial

$$\mathbf{G}_{N \times N} \longrightarrow \mathbf{g}_{N^2 \times 1}$$

$$\mathbf{H}_{N^2 \times N^2}$$

$$\mathbf{F}_{N \times N} \longrightarrow \mathbf{f}_{N^2 \times 1}$$



$$g_i = \sum_j h_{ij} f_j$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{f}$$

# Exemplos

$$C_{p,q,r} = A_{p,q,r} + B_{p,q,r}$$

Algoritmo:

$n = p \cdot q \cdot r$ ;

for (i=0; i < n ; i++) c[i]=a[i] + b[i];

Sistemas lineares var. espaço

$$G_{p,q} = H_{p,q,m,n} \cdot F_{m,n} + n_{p,q}$$

$$\vec{g}_{p,q,1} = H_{p,q,m,n} \cdot \vec{f}_{m,n,1} + \vec{n}_{p,q,1}$$

Algoritmo

for ( i = 0 ; i < n ; i + + )

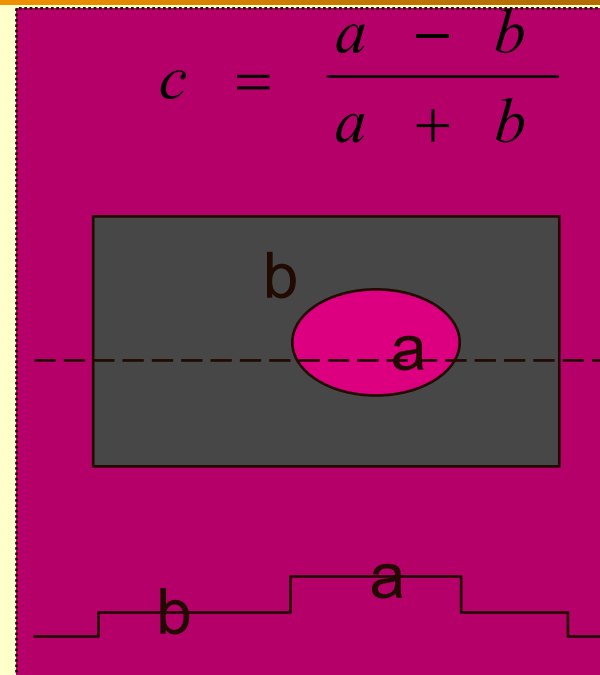
$$g[i] = \sum_{j=0} h_{ij} \cdot f_j + n[i]$$

# Plano da aula de hoje

- **Fundamentos de Imagens Digitais 2D e 3D**
  - 📁 **Motivação: preparatório p/ as próximas aulas**
    - Compressão, transformadas geométricas, segmentação, filtragem, PACS, visualização, tomografia
  - 📁 **Conceitos básicos de proc. imagens**
    - pixel/voxel, resolução espacial, discretização, faixa dinâmica, resolução temporal
    - **histograma e segmentação por threshold**
    - **sistemas lineares**
    - **Medidas de qualidade em imagens**
    - **visualização**
    - **Transformadas, convolução**
    - **interpolação**

# Imagens: características

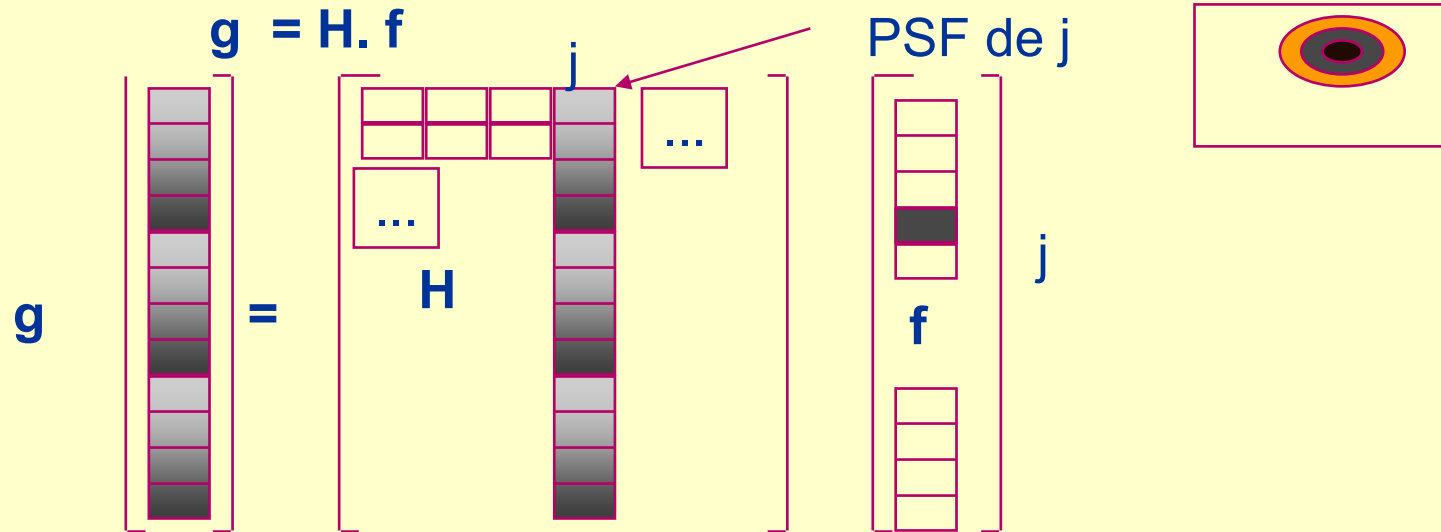
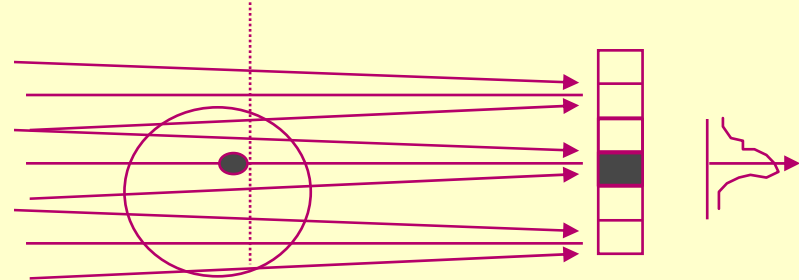
- **Contraste**
- **Resolução espacial**
- **Resolução intens.: 1/256 =>**
- **Faixa dinâmica**  
[0, 255] =>
- **Desafio: compactação de info. p/ apresentar os parâm. diagnósticos fundam.**



# Modelo p/ degradação

- Puntual
- Cromático
- Degradação pelo processo da vizinhança (Blur)
  - 📁 difração
  - 📁 movimento
  - 📁 desfocamento

# Modelo p/ degradação



$$\sum_i h_{ij} = 1$$

(Conservação de energia)

# Point spread function (PSF)

- **Conceito: resposta impulsiva**

- **SVPSF: space variant PSF**

$$g(x', y') = \iint h(x', y', x, y) \cdot f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

$$g = H \cdot f$$

- **SIPSF : space invariant PSF**

$$g(x', y') = \iint h(x' - x, y' - y) \cdot f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

$$h(x', y', x, y) = h(x' - x, y' - y)$$

$$g(x', y') = (h * f)(x', y') \quad \text{(Convolução)}$$

**H : matriz circulante**

$$H = A \otimes B^T$$

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v)$$

$h(0)$	0	$h(2)$	$h(1)$
$h(1)$	$h(0)$	0	$h(2)$
$h(2)$	$h(1)$	$h(0)$	0
0	$h(2)$	$h(1)$	$h(0)$



- **Modelo realístico simplificado**

- ✎ **blur**

- ✎ **ruído**

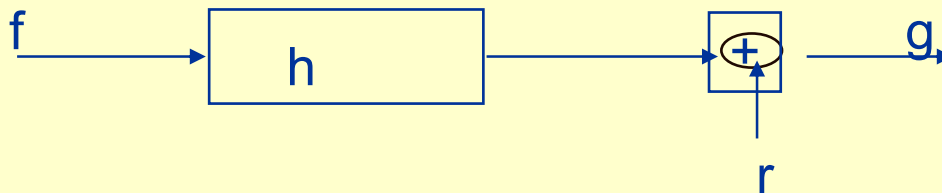
- ✎ **sistema linear**

- ✎ **Space invariant PSF**

$$g = H.f + r$$

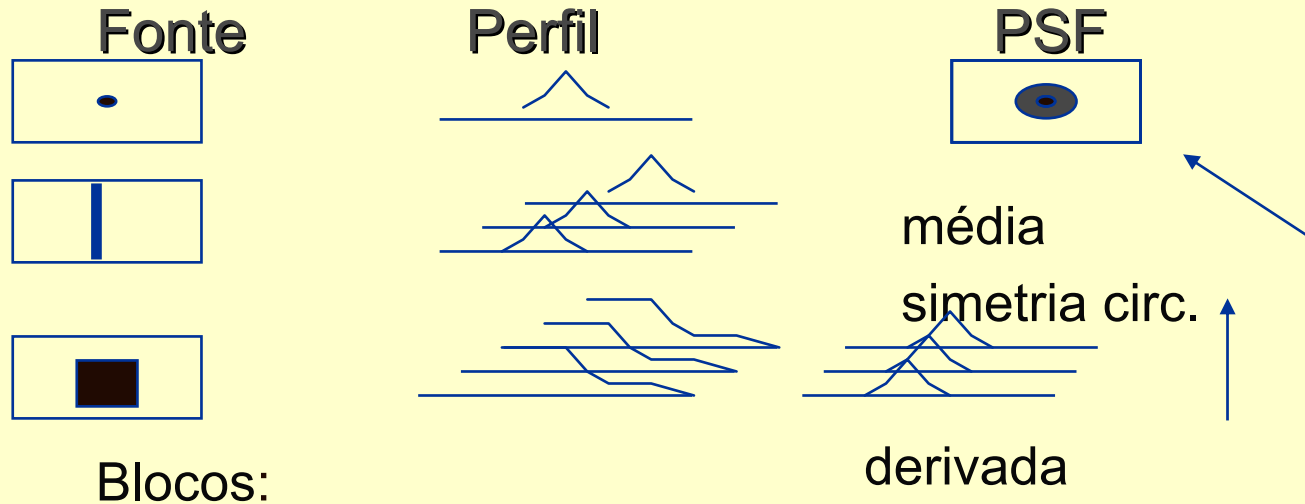
$$g(x', y') = \iint h(x' - x, y' - y) \cdot f(x, y) \cdot dx \cdot dy + r(x', y')$$

$$G(u,v) = \mathbf{H}(u,v) \cdot F(u,v) + R(u,v)$$



# Estimativa de parâmetros

## ● PSF



$$P_{gg} \cong |H(u, v)|^2 \cdot P_{ff}$$

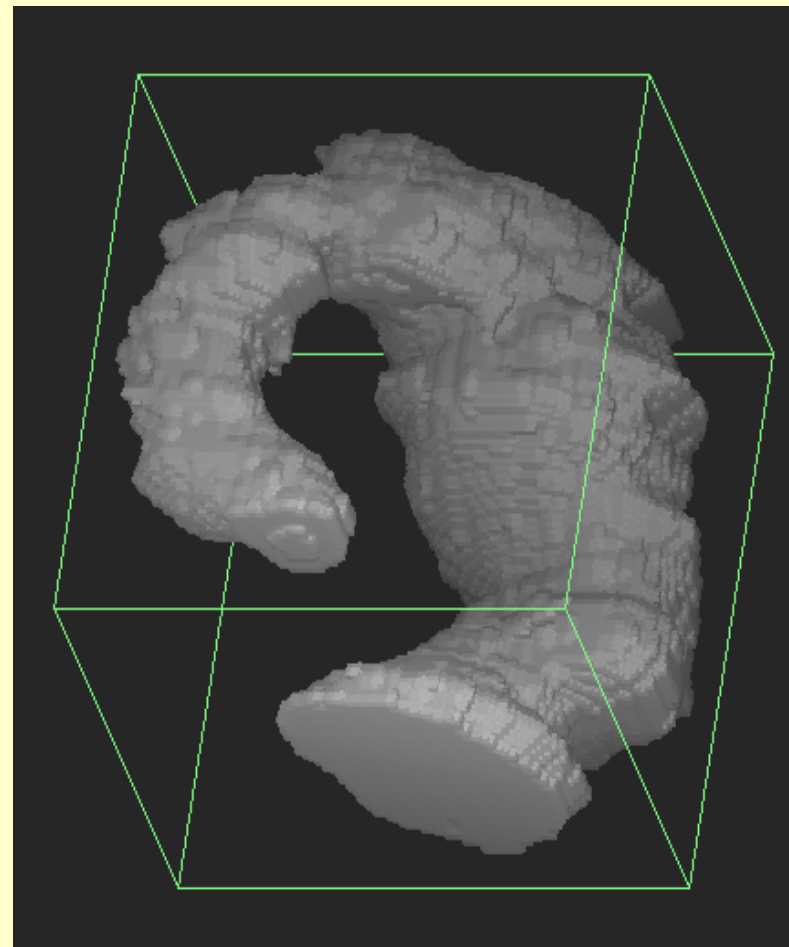
$$\log |H| = \frac{1}{M} \cdot \sum (\log |G| - \log |F|)$$

# Plano da aula de hoje

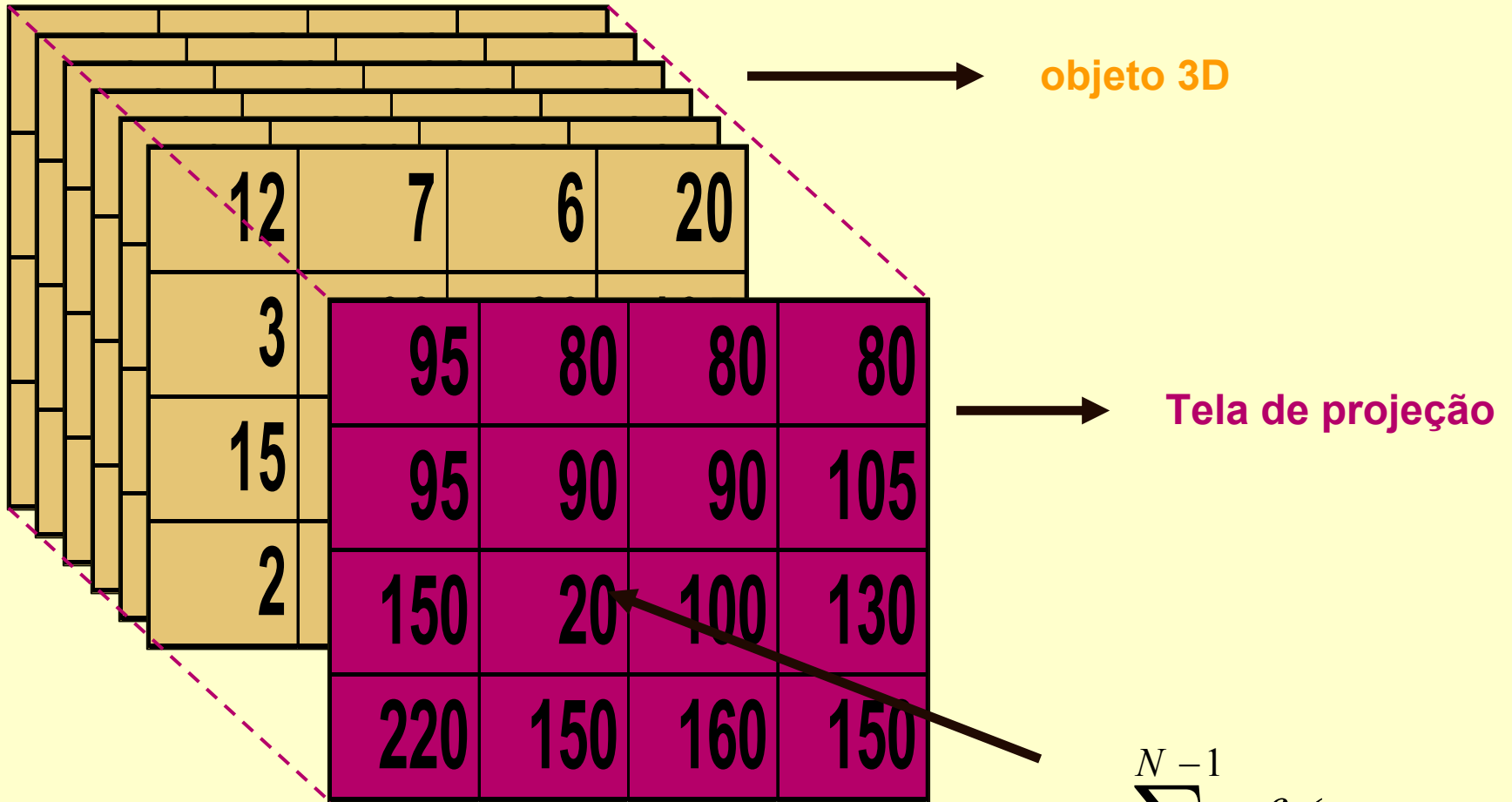
- **Fundamentos de Imagens Digitais 2D e 3D**
  - 📁 **Motivação: preparatório p/ as próximas aulas**
    - Compressão, transformadas geométricas, segmentação, filtragem, PACS, visualização, tomografia
  - 📁 **Conceitos básicos de proc. imagens**
    - pixel/voxel, resolução espacial, discretização, faixa dinâmica, resolução temporal
    - **histograma e segmentação por threshold**
    - **sistemas lineares**
    - **medidas de qualidade em imagens**
    - **visualização**
    - **Transformadas, convolução**
    - **interpolação**

# Motivação: Visualização de superfícies

- 📁 **Segmentação (contornos)**
  - primitivas
- 📁 **Rendering**
  - mapeamento p/ 2D

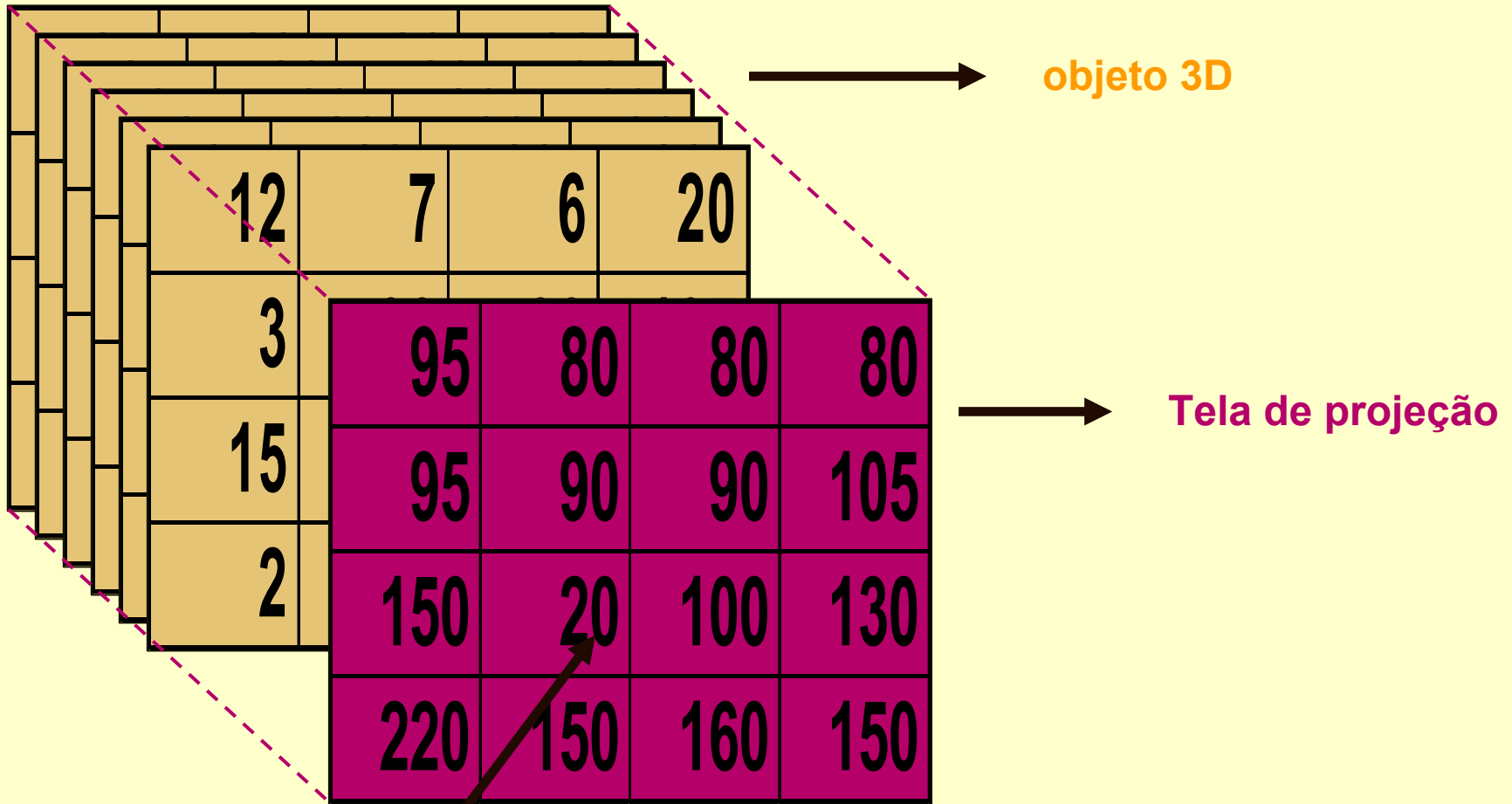


# Operador Projeção



$$g_{xy} = \sum_{z=0}^{N-1} f(x, y, z)$$

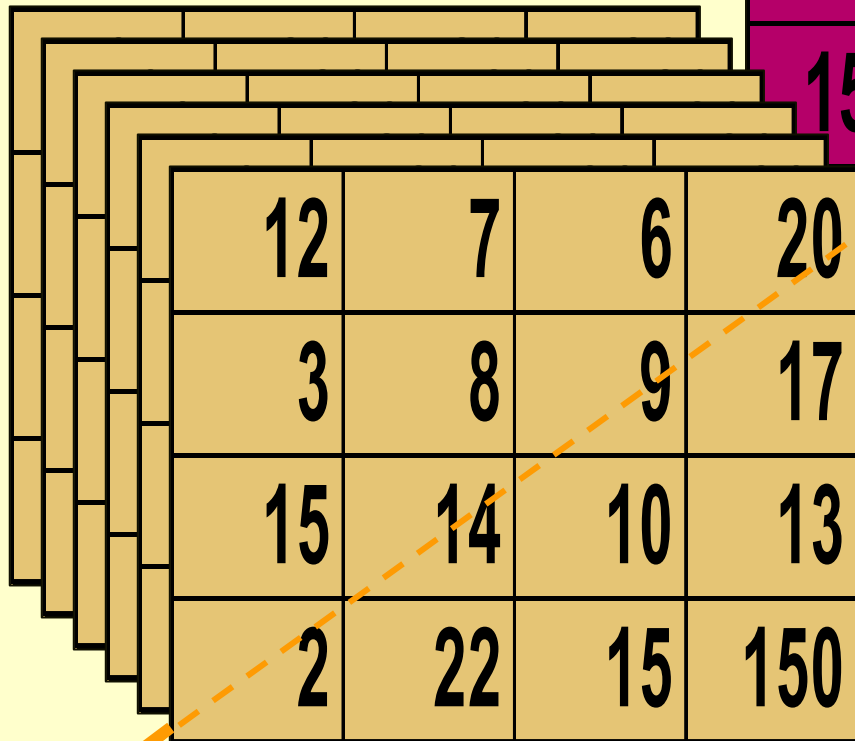
# Operador MIP



$$g_{xy} = \max_z \{ f(x, y, z) \text{ para } (x, y) \}$$

# casos oblíquos

objeto 3D



95	80	80	80
95	90	90	105
150	20	100	130
10	150	160	150

Tela de projeção

- basta considerar as intersecções
- soma ponderada (Radon)
  - maior valor (MIP)

# Exemplos

- **diferença de imagens**
- **média**
- **projeção**
- **MIP: maximum intensity projection**



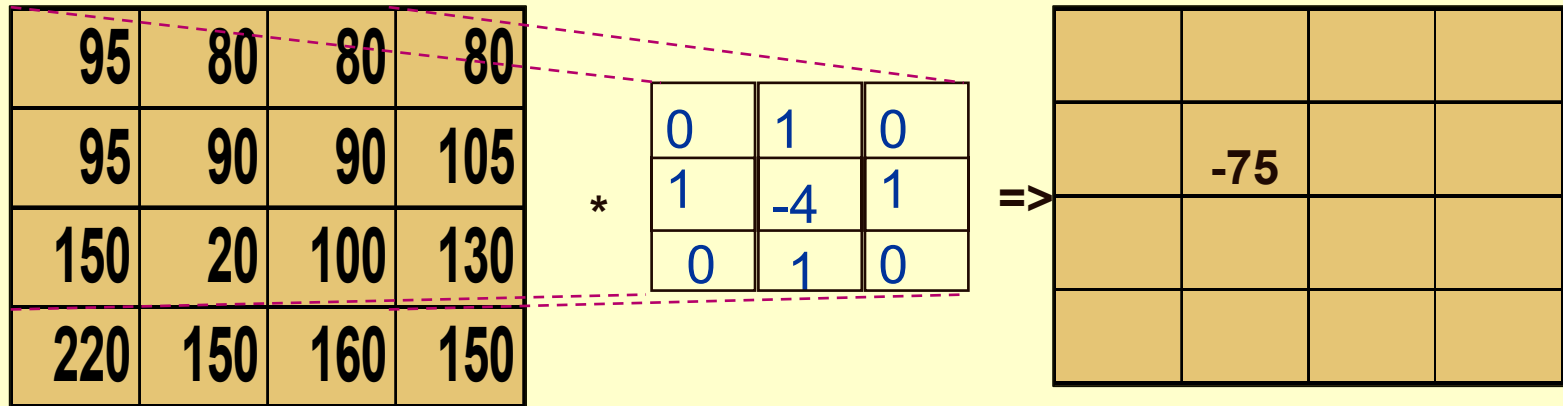
# Plano da aula de hoje

- **Fundamentos de Imagens Digitais 2D e 3D**
  - 📁 **Motivação: preparatório p/ as próximas aulas**
    - Compressão, transformadas geométricas, segmentação, filtragem, PACS, visualização, tomografia
  - 📁 **Conceitos básicos de proc. imagens**
    - pixel/voxel, resolução espacial, discretização, faixa dinâmica, resolução temporal
    - **Medidas de qualidade em imagens**
    - **histograma e segmentação por threshold**
    - **sistemas lineares**
    - **visualização**
    - **Convolução e operadores**
    - **Transformadas de Fourier**
    - **interpolação**

# Operadores

# Convolução 2D

$$g(i, j) = f * h = \frac{1}{MN} \sum_m \sum_n f(m, n) \cdot h(i - m, j - n)$$



# Gradiente

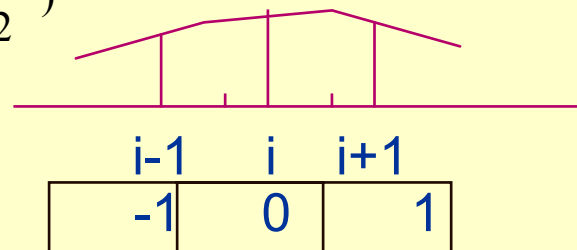
$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} u_x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} u_y$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=i} = f\left(i + \frac{1}{2}\right) - f\left(i - \frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(i + \frac{1}{2}\right) = \frac{f(i) + f(i+1)}{2}$$

$$f\left(i - \frac{1}{2}\right) = \frac{f(i-1) + f(i)}{2}$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=i} = \frac{f(i+1) - f(i-1)}{2}$$



$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|$$

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

Sobel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|$$

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

# Algoritmo p/ Laplaciano em x?

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=i} = f\left(i + \frac{1}{2}\right) - f\left(i - \frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(i + \frac{1}{2}\right) = \frac{f(i) + f(i+1)}{2}$$

$$f\left(i - \frac{1}{2}\right) = \frac{f(i-1) + f(i)}{2}$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=i} = \frac{f(i+1) - f(i-1)}{2}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

# Sobel, Laplace,...

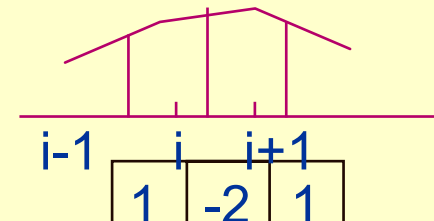
$$\text{Sobel } ( f ( x , y ) ) = \sqrt{ \left( \frac{\partial f ( x , y )}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f ( x , y )}{\partial y} \right)^2 }$$

$$\nabla^2 f ( x , y ) = \frac{\partial^2 f ( x , y )}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f ( x , y )}{\partial y^2}$$

## Laplace

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 f ( x , y )}{\partial x^2} \right|_i &= \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial x} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} \\ &= ( f ( i + 1 ) - f ( i ) ) - ( f ( i ) - f ( i - 1 ) ) \\ &= f ( i - 1 ) - 2 f ( i ) + f ( i + 1 ) \end{aligned}$$

0	1	0
1	-4	1
0	1	0



$$H ( z ) = ( z^{-1} - 2 + z )$$

$$H ( w ) = - 2 ( 1 - \cos( wT ) )$$

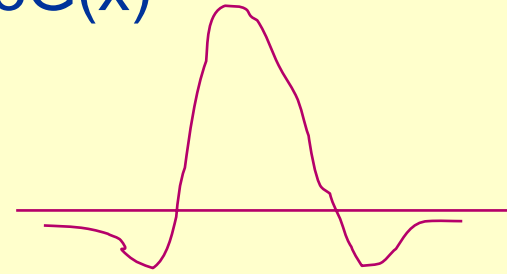
# Laplaciano da Gaussiana (LoG)

- **Edge detector**

- ✎ **Gauss=>Smooth**

- ✎ **Laplace=>Zero crossing**

LoG(x)



$$Gauss(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$g(x, y) = \nabla^2 Gauss(x, y) * f(x, y)$$

# Exemplos de operadores

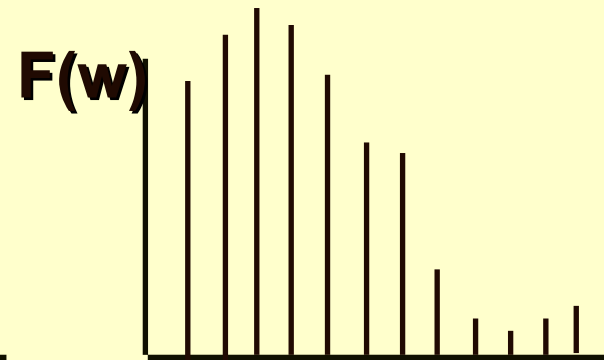
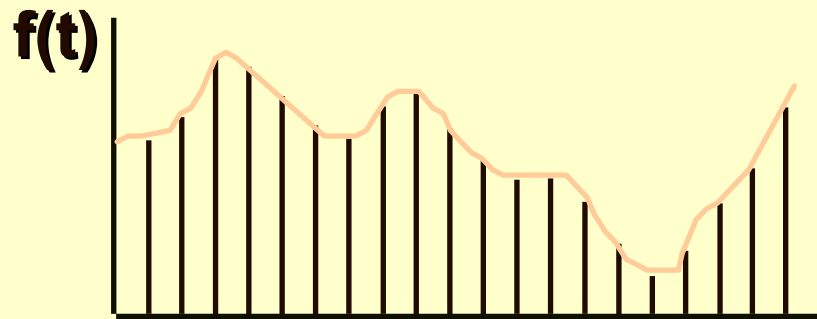
- **Exemplos no ImageJ**
  - ✎ **convolução**
  - ✎ **gradiente**
  - ✎ **realce de bordas**
  - ✎ **Laplaciano**
  - ✎ **bordas**



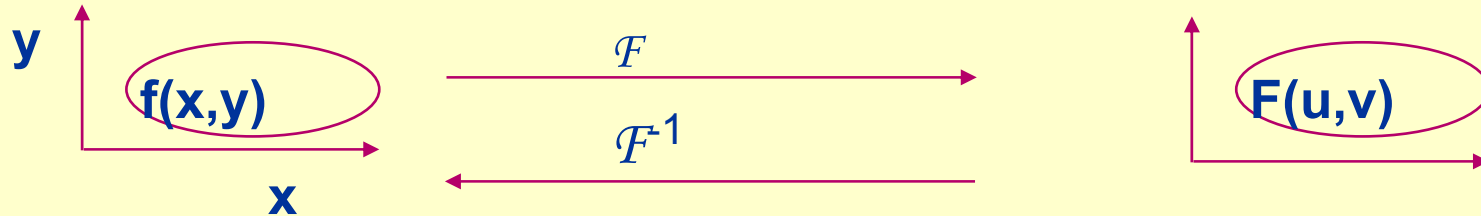
# Plano da aula de hoje

- **Fundamentos de Imagens Digitais 2D e 3D**
  - 📁 **Motivação: preparatório p/ as próximas aulas**
    - Compressão, transformadas geométricas, segmentação, filtragem, PACS, visualização, tomografia
  - 📁 **Conceitos básicos de proc. imagens**
    - pixel/voxel, resolução espacial, discretização, faixa dinâmica, resolução temporal
    - **Medidas de qualidade em imagens**
    - **histograma e segmentação por threshold**
    - **sistemas lineares**
    - **visualização**
    - **Convolução**
    - **Transformadas de Fourier**
    - **interpolação**

# Transformadas no dom. freq.



# Transf. de Fourier, DFT,FFT



## Contínuo

*Direta:*

$$F(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \exp(-j2\pi(ux + vy)) \cdot dx \cdot dy$$

*Inversa:*

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \cdot \exp(j2\pi(ux + vy)) \cdot du \cdot dv$$

## Discreto

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \exp\left(-j2\pi\left(u \frac{x}{M} + v \cdot \frac{y}{N}\right)\right)$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot \exp\left(j2\pi\left(u \frac{x}{M} + v \cdot \frac{y}{N}\right)\right)$$

# Propriedades da Transf. Fourier

- **Convolução**

$$\begin{array}{ccc}
 h * f & \longleftrightarrow & G = H \cdot F \\
 g & \xleftarrow{F^{-1}} & G
 \end{array}$$

- **Correlação**

$$f \circ g \longleftrightarrow F^* \cdot G$$

$$f(x) \circ g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(u) \cdot g(x + u) \cdot du$$

- **Densidade espectral de potência**

$$P_{fg}(u, v) = \text{Fourier} (R_{fg}(x, y))$$

$$P_{fg}(u, v) = F^*(u, v) \cdot G(u, v)$$

$$P_{ff}(u, v) = F^*(u, v) \cdot F(u, v) = |F(u, v)|^2$$

- **Separabilidade**

- **Translação**

$$\boxed{f(x-x_0)} \quad F(u) \cdot \exp(-j2\pi \cdot u \cdot x_0/N)$$

- **Escala**

$$\boxed{a \cdot f(bx)} \quad a/|b| \cdot F(u/b)$$

## Transformada do Cosseno (JPEG)

- **A técnica:**
  - ✉ **Dividir a imagem em blocos de 8x8 pixels**
  - ✉ **Aplicar a DCT em cada bloco (em zig-zag)**
  - ✉ **Cortar os coeficientes para as componentes abaixo de um certo limite**
  - ✉ **Armazenar a série de coeficientes inteiros usando LZW**

# ver transf.ppt

# Restauração e filtragem

---

- **Filtragem no domínio do espaço (Convolução)**

$$g(x', y') = \iint h(x' - x, y' - y) \cdot f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

$$g(x', y') = (h * f)(x', y')$$

$$g_{ij} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} h(i-m, j-n) \cdot f(m, n)$$

📁 **Exemplos**

📁 **Características do filtro?**

- **Filtragem no domínio da frequência (DFT)**



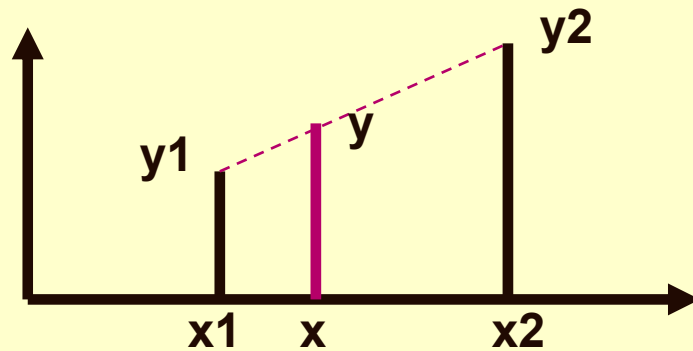
# Exemplo de filtros

- **FFT => espectro**
- **Filtro passa-banda**

# Plano da aula de hoje

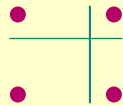
- **Fundamentos de Imagens Digitais 2D e 3D**
  - 📁 **Motivação: preparatório p/ as próximas aulas**
    - Compressão, transformadas geométricas, segmentação, filtragem, PACS, visualização, tomografia
  - 📁 **Conceitos básicos de proc. imagens**
    - pixel/voxel, resolução espacial, discretização, faixa dinâmica, resolução temporal
    - **Medidas de qualidade em imagens**
    - **histograma e segmentação por threshold**
    - **sistemas lineares**
    - **visualização**
    - **Convolução**
    - **Transformadas de Fourier**
    - **interpolação**

# Interpolação

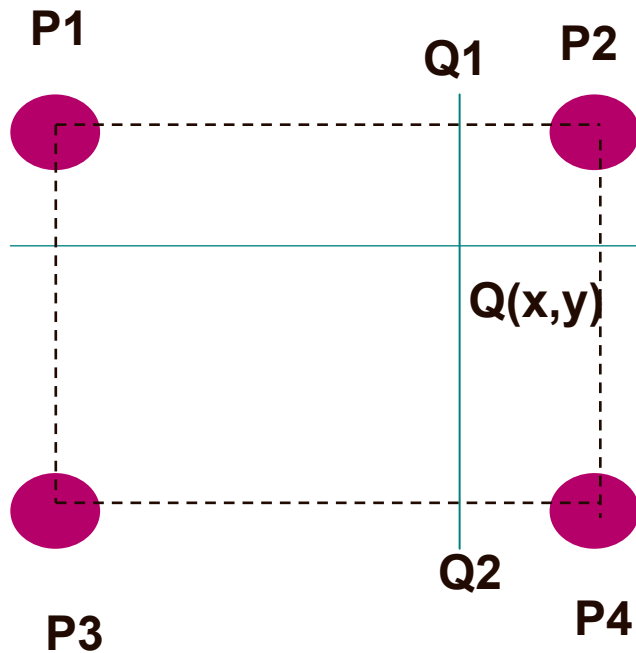


$$y = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

6	8
2	4



# Transformações geométricas



$$I(Q1) = I_1 + \frac{(I_2 - I_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

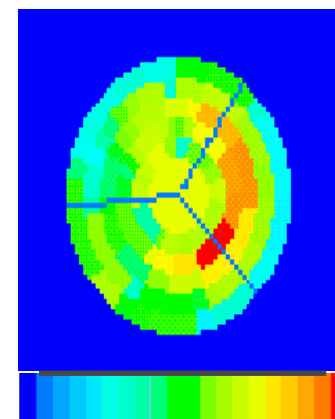
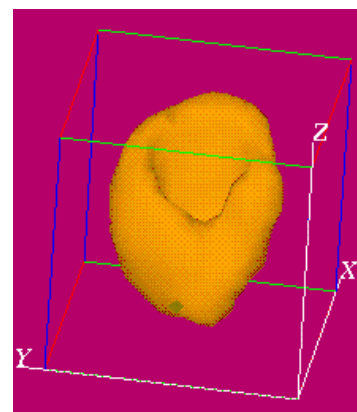
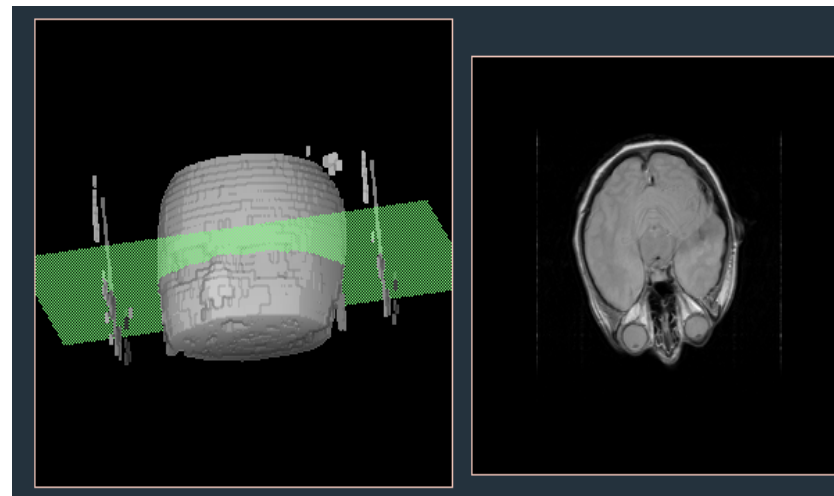
$$I(Q2) = I_3 + \frac{(I_4 - I_3)}{x_4 - x_3} \cdot (x - x_3)$$

$$I(Q) = I(Q1) + \frac{I(Q2) - I(Q1)}{y_2 - y_1} \cdot (y - y_1)$$

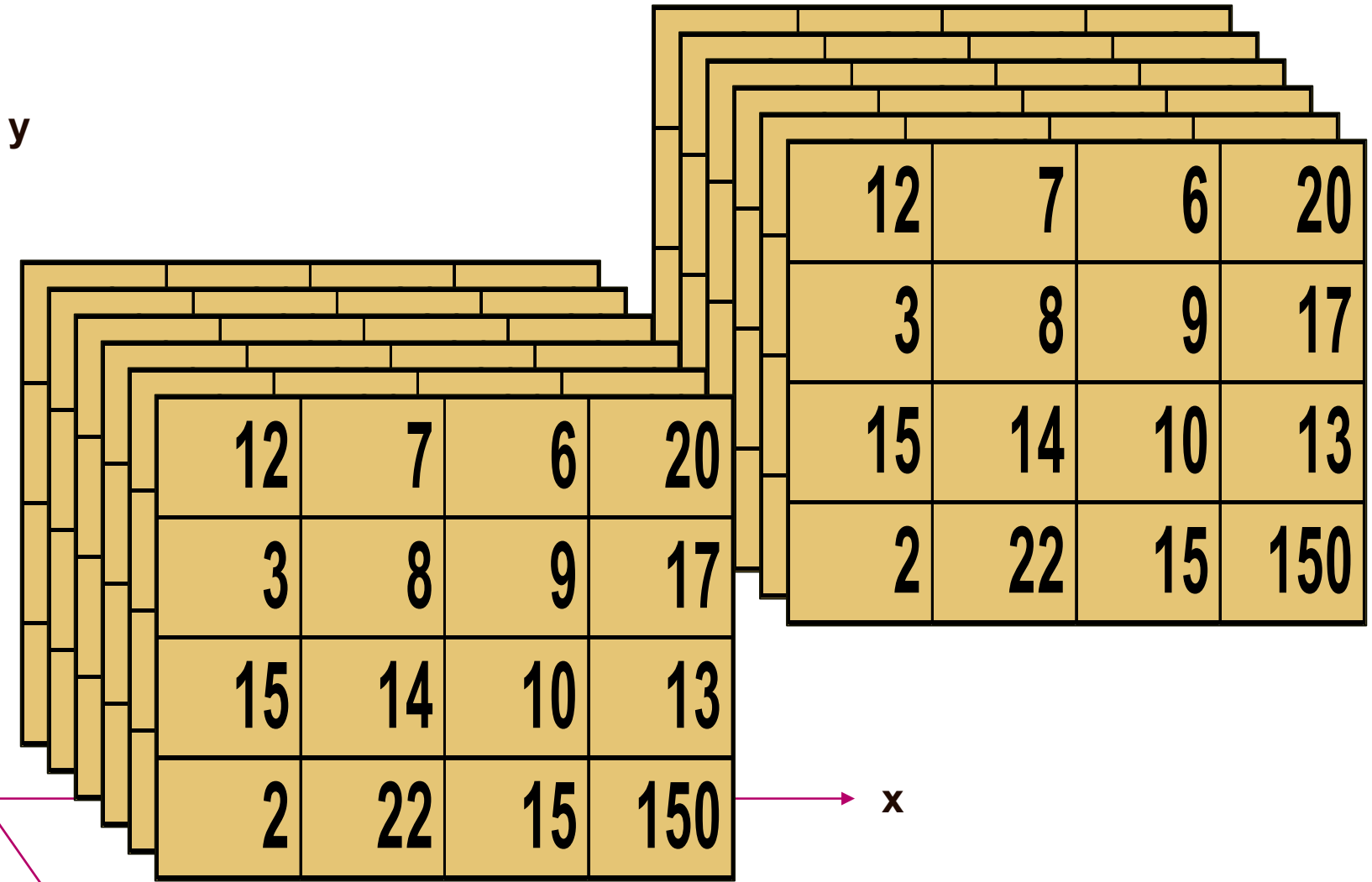


# Motivação: fusão

- **Conjugação de imagens para melhorar a sensitividade e sensibilidade diagnóstica (fusão)**
- **Alinhamento de imagens 3D**
  - ☞ **Estudo multi-modal (CT, MRI, SPECT, ..) quantitativa**
  - ☞ **Aumento da sensitividade e da especificidade diagnóstica**



# Translação



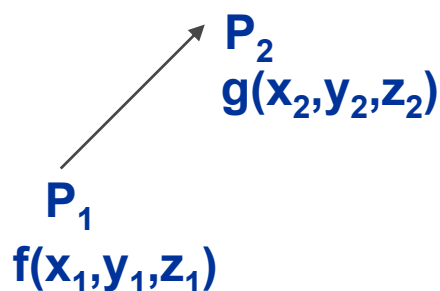
# Translação

$$P_1 + \text{translacao} \Rightarrow P_2$$

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_0, y_0, z_0) = (x_2, y_2, z_2)$$

$$g(x_2, y_2, z_2) = f(x_1, y_1, z_1)$$

$$g(x_2, y_2, z_2) = f(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$$



$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**x**



# Escala

y

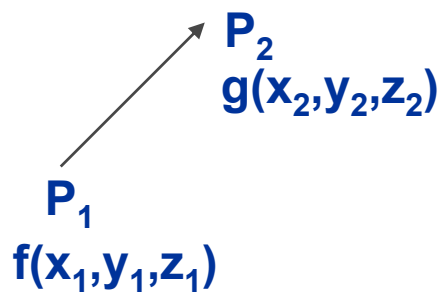
12	7	6	20
3	8	9	17
15	14	10	13
2	22	15	150

12	7	6	20
3	8	9	17
15	14	10	13
2	22	15	150

x

# Escala

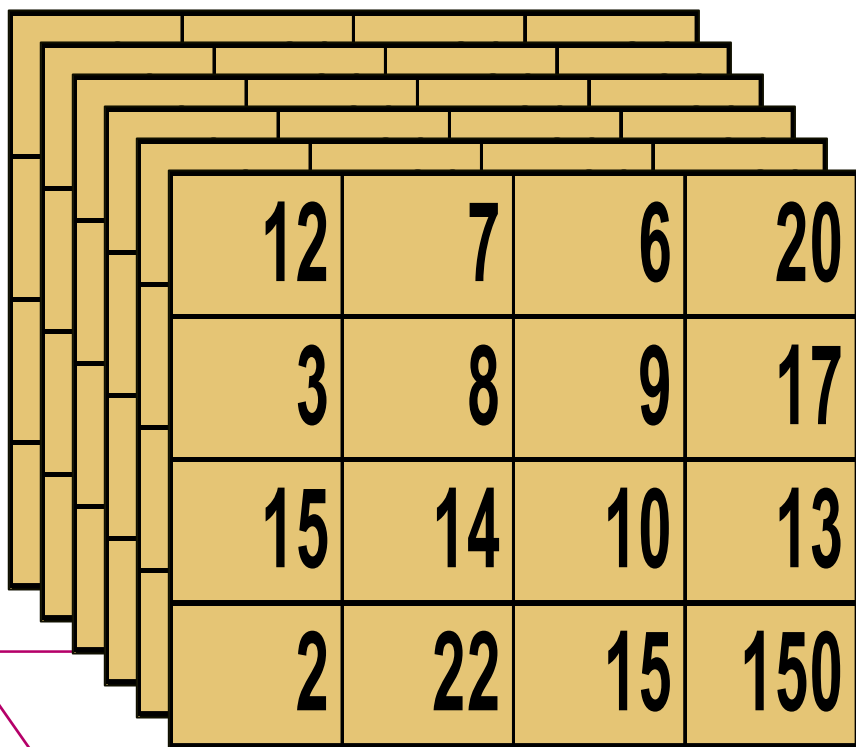
$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



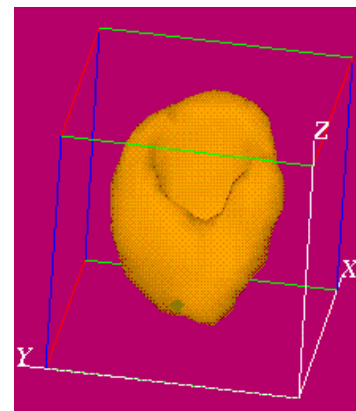
**x**

# Rotação

y



x



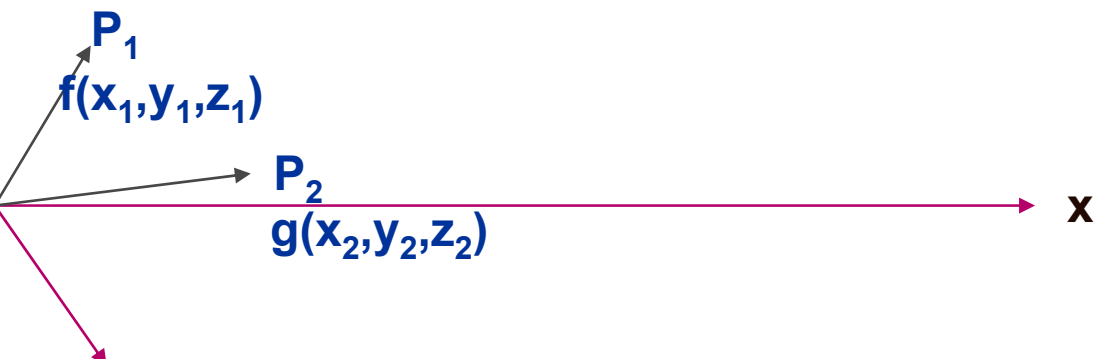
# Rotação

$$P_1[\text{rotação } (\alpha, \beta, \gamma)] \Rightarrow P_2$$

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

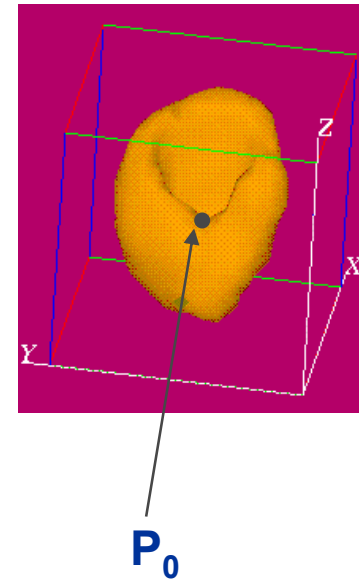


# Transformações geométricas

Escalamento (S) e Rotação (R) em torno de um ponto genérico ( $P_0$ )

- 1) P/ rotação deve-se centrar em ( $P_0$ ) => translação T
- 2) Rotação R
- 3) Retorno da translação ( $T^{-1}$ )
- 4) Escala S

$$P_2 = S.T_0^{-1}.R.T_0(P_1)$$



# Exemplos práticos

- **rotação**
- **slice**
- **interpolação**
- **rendering 3D**
  - ✎ **rotação**
  - ✎ **projeção**
  - ✎ **opacidade / reflexão / ...**

# Tomografia Algébrica

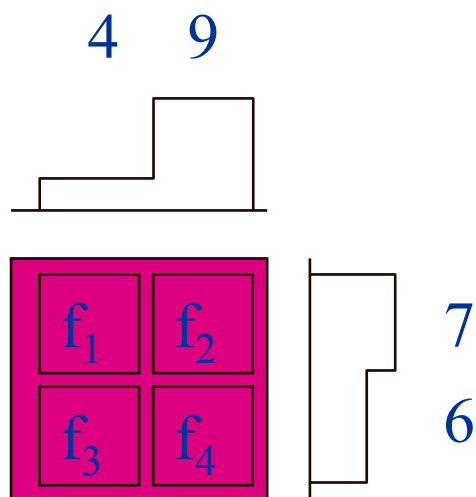


Imagem  
f

Problema: f |

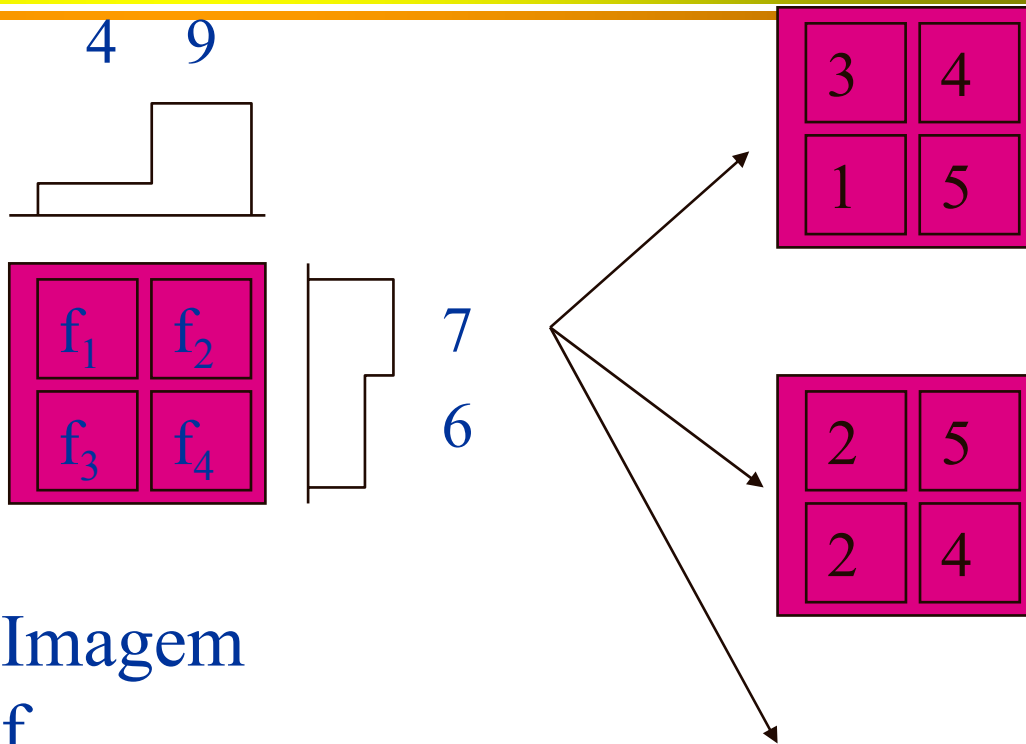
$$f_1 + f_2 = 7$$

$$f_3 + f_4 = 6$$

$$f_1 + f_3 = 4$$

$$f_2 + f_4 = 9$$

# Soluções



$$A \cdot x = b$$

Imagem

M equações com N incógnitas

Sistema indeterminado (infinitas soluções,  $\text{rank} < N$ )

Sistema inconsistente (M eq. Lin. Indep  $> N$ ) => otimização



# Algébrica: otimização (regularizada)

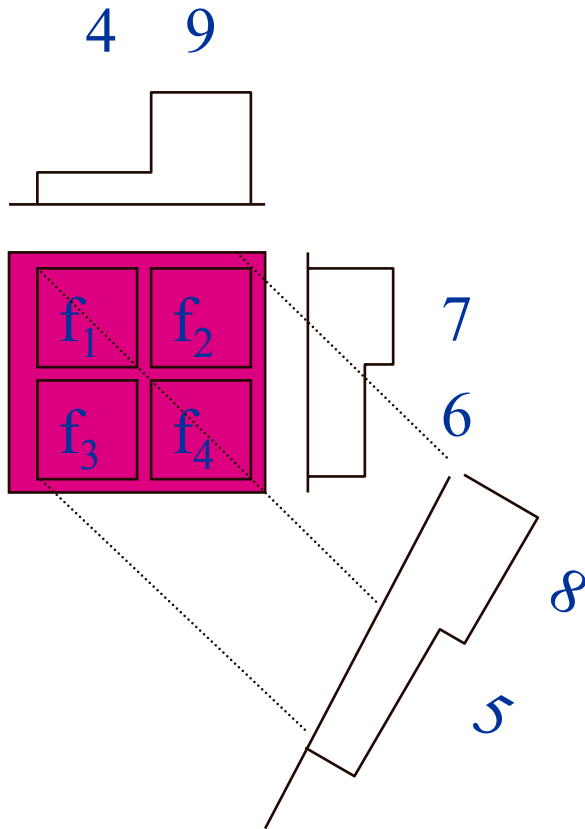


Imagem  
f

Problema: f |

$$f_1 + f_2 = 7$$

$$f_3 + f_4 = 6$$

$$f_1 + f_3 = 4$$

$$f_2 + f_4 = 9$$

$$.5f_1 + f_3 + .5f_4 = 5$$

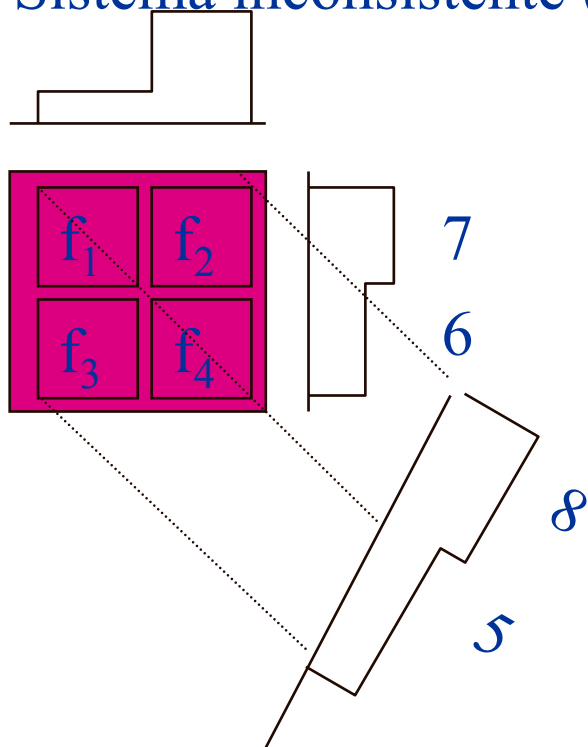
$$.5f_1 + f_2 + .5f_4 = 8$$

# Soluções (otimizada)

$$A \cdot x = b$$

6 equações com 4 incógnitas

Sistema inconsistente (M eq. Lin. Indep > N) => otimização



$$\min_{\hat{x}} |A \cdot \hat{x} - b|^2$$

$$\hat{x} = A^+ b$$

$$A^+ = (A' A)^{-1} A'$$

